大正資訊模擬輔助教學
臺中區國立高級中學九十四學年度
大學入學學科能力測驗聯合模擬考
數學考科詳解

解題老師：吳憲章老師

第一部分：選擇題

壹、單選題

1. (5)　2. (4)　3. (3)　4. (3)　5. (4)　6. (3)

貳、多選題

7. (2)(4)　8. (1)(2)(3)(4)(5)　9. (1)(2)(3)(4)(5)　10. (1)(2)(4)　11. (4)(5)
12. (2)(5)　13. (1)(2)(3)(4)(5)

第二部分：選填題

A. 17361　B. $\frac{35}{13}$　C. 03 及 08
D. $x-y+z=2$　E. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=14$
F. $2\sqrt{2}$　G. 11

解析

第一部分：選擇題

壹、單選題

1. 見招　數的表示

接招　十進位數與十六進位數的互換

拆招　$30292=16\times1893+4$

$=16\times(16\times118+5)+4$

$=118\times16^2+16\times5+4$

$=(7\times16+6)\times16^2+16\times5+4$

$=7\times16^3+6\times16^2+5\times16^1+4$

$=xyzu_{16}$

故 $x=7$，$y=6$，$z=5$，$u=4$

得 $x+y+u=7+6+4=17$

故選(5)

2. 見招 三角函數的應用

接招 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

拆招 $\log\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}\log 6=\log\sqrt{6}$

$\Rightarrow\ \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{6}\ \Rightarrow\ (1+\sin\theta)^2=6\cos^2\theta$

$\Rightarrow\ \sin^2\theta+2\sin\theta+1=6(1-\sin^2\theta)\ \Rightarrow\ 7\sin^2\theta+2\sin\theta-5=0$

$\Rightarrow\ (\sin\theta+1)(7\sin\theta-5)=0\ \Rightarrow\ \sin\theta=\dfrac{5}{7}$ 或 -1（不合）

$\therefore\ \sin\theta\doteqdot 0.7143$，由查表知 $\cos 44°25'=0.7143$

$\Rightarrow\ \cos(90°-45°35')=0.7143\ \Rightarrow\ \sin 45°35'=0.7143$

故 $\theta\doteqdot 45°35'$，故選(4)

3. 見招 空間向量坐標及正射影的應用

接招 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之正射影為 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\right)\overrightarrow{AC}$

拆招 令 $C(x，y，1)$，$O'(0，0，1)$

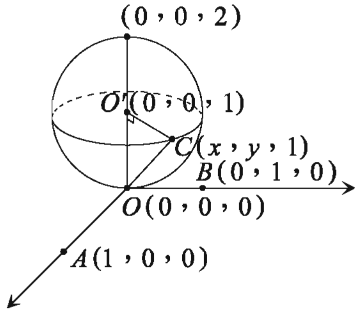
則 $\overline{CO'}=1\ \Rightarrow\ \sqrt{x^2+y^2+0^2}=1\ \Rightarrow\ x^2+y^2=1$

故令 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，得 $C(\cos\theta，\sin\theta，1)$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=(-1，1，0)$，$\overrightarrow{AC}=(\cos\theta-1，\sin\theta，1)$

$\therefore\ \overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\right)\overrightarrow{AB}=\dfrac{-\cos\theta+1+\sin\theta}{2}(-1，1，0)$

$\because$ 此正射影的 x 分量為 -1 $\therefore\ \dfrac{-\cos\theta+1+\sin\theta}{2}=1$



$\Rightarrow\ 1+\cos\theta=\sin\theta\ \Rightarrow\ (1+\cos\theta)^2=\sin^2\theta$

$\Rightarrow\ \cos^2\theta+2\cos\theta+1=1-\cos^2\theta$

$\Rightarrow\ 2\cos^2+2\cos\theta=0\ \Rightarrow\ \cos\theta=0$ 或 -1

$\because\ \cos\theta\neq 1$ 且 $\sin\theta\neq 1$ $\therefore\ \cos\theta\neq 1$ 且 $\cos\theta\neq 0$

$\therefore\ \cos\theta=-1\ \Rightarrow\ \sin\theta=0$ $\therefore\ C(-1，0，1)$

故選(3)

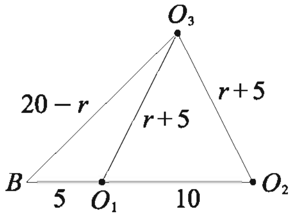
4. 見招 餘弦定理的應用

接招 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

拆招 設圓 O_3 的半徑為 r，則由圖知 $\overline{O_2O_3}=r+5$，$\overline{O_1O_3}=r+5$

$\overline{O_1O_2}=10$，$\overline{O_1B}=5$，$\overline{BC}=20$，$\overline{O_3B}=20-r$，$\overline{O_2B}=15$

$B=\angle O_3BO_1=\angle O_3BO_2$



由餘弦定理知

$\cos B=\dfrac{5^2+(20-r)^2-(r+5)^2}{2\times5\times(20-r)}=\dfrac{15^2+(20-r)^2-(r+5)^2}{2\times15\times(20-r)}$

$\Rightarrow\ r=6$

故選(3)

5. 見招 雙曲線的性質

接招 雙曲線 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a$，$\overline{F_1F_2}=2c$，$b^2=c^2-a^2$ ⇒ 正焦弦長$=\dfrac{2b^2}{a}$

拆招 令 $P(z)$，$F_1(3i)$，$F_2(-3i)$，則 $\overline{F_1F_2}=6$

原式 ⇒ $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2$

故 $2c=6$，$2a=2$ ⇒ $c=3$，$a=1$

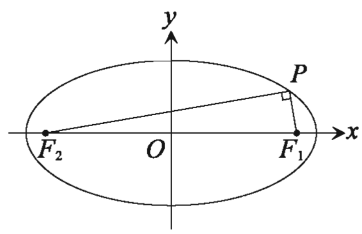
所以 $b^2=c^2-a^2=9-1=8$

得正焦弦長$=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 8}{1}=16$，故選(4)

6. 見招 橢圓的性質

接招 P 為橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一點，F_1，F_2 為二焦點 ⇒ $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$

拆招 如圖，設 $\overline{PF_1}=x$，$\overline{PF_2}=y$



由 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

⇒ $a^2=4$，$b^2=1$ ⇒ $c^2=a^2-b^2=3$

則 $x+y=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=4$ ……①

$x^2+y^2=(2c)^2=4c^2=4\times 3=12$ ……②

$①^2-②$得 $2xy=4$ ⇒ $xy=2$

∴ $\triangle PF_1F_2$ 之面積$=\dfrac{1}{2}xy=\dfrac{1}{2}\times 2=1$

故選(3)

貳、多選題

7. 見招 二元一次方程式整數解的問題

接招 a，b，$c\in Z-\{0\}$，且 $(a，b)\mid c$，則 $ax+by=c$ 有整數解

拆招 依題意知：寶物所在地是格子點

故所走路線 $ax+by=c$ 沒有整數解，則不可能得到寶物

(1) $(3，4)=1\mid 121$

(2) $(6，9)=3\nmid 1400$

(3) $(18，117)=9\mid 1008$

(4) $(26，39)=13\nmid 1524$

(5) $(28，112)=28\mid 252$

故選(2)(4)

8. 見招 整數的概念

接招 a，$b \in Z \Rightarrow a+b$，$a-b$，$ab \in Z$

拆招 $x^3-x-k=0 \Rightarrow k=x^3-x=x(x-1)(x+1)$，$k \in N$

故 $x=2 \Rightarrow k=6$

$x=3 \Rightarrow k=24$

$x=4 \Rightarrow k=60$

$x=5 \Rightarrow k=120$（不合）

得 k 只有 6，24，60 三個數

(1) $k=6$，24，60 必為 3 的倍數

(2) $k=6$，24，60 均為偶數

(3) $k=60$ 最大

(4) k 值只有 3 種

(5) $6+24+60=90$

故選(1)(2)(3)(4)(5)

9. 見招 實係數 n 次方程式根的判別及勘根定理的應用

接招 實係數 n 次方程式 $f(x)=0$，若 $f(a)f(b)<0$，則在 a，b 之間至少有一實根

拆招 (1)(i)若 $a \neq 0$，則 $f(x)=0$ 為三次方程式，由虛根成雙定理知：必至少有一實根

(ii)若 $a=0$，則 $f(x)=-2x^2+bx+1=0$，由 $D=b^2+8>0$ 知：有兩相異實根

(2) $\because f(0)=1>0$，$f(-1)=-a-2-b+1=-(a+b)-1$

又 $a+b>1 \Rightarrow f(-1)<0$

故 $f(0)f(-1)<0$，由勘根定理知：-1 與 0 之間至少有一實根

(3) $\because f(0)=1>0$，$f(1)=a-2+b+1=(a+b)-1$

又 $a+b<1 \Rightarrow f(1)<0$，故 $f(0)f(1)<0$

由勘根定理知，0 與 1 之間至少有一實根

(4) $a+b=1 \Rightarrow f(1)=a-2+b+1=(a+b)-1=0$，得 $f(x)=0$ 有一實根 1

又 $f(-1)=-a-2-b+1=-(a+b)-1=-2<0$，$f(0)=1>0$

故 $f(-1)f(0)<0$，由勘根定理知 -1 與 0 之間至少有一實根，且 1 為另一實根

所以此方程式至少有二實根

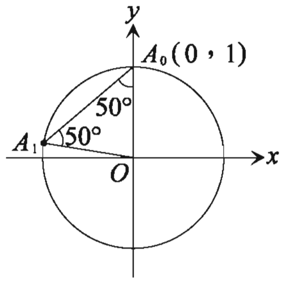
(5)若 $-1<a+b<1$，則 $f(1)=(a+b)-1<0$，$f(0)=1>0$，$f(-1)=-(a+b)-1<0$

故在 -1 與 0 之間，0 與 1 之間各有一實根

又 $a \neq 0$，故一定又有另一實根，所以必有三實根

故選(1)(2)(3)(4)(5)

10. 見招 等比級數及棣美弗定理的應用



接招 ① $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

② $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

拆招 如圖，等腰$\triangle A_0OA_1$，$\angle A_1A_0O=\angle A_0A_1O=50°$

$\Rightarrow\ \angle A_0OA_1=80°$

故 $a_n=a_{n-1}(\cos 80°+i\sin 80°)$

$\Rightarrow\ a_n=a_0(\cos 80°+i\sin 80°)^n=i[(\cos(n\cdot 80°)+i\sin(n\cdot 80°)]$

(1) $\langle a_n\rangle$為等比數列，公比為 $\cos 80°+i\sin 80°$

(2) $\because\ a_9=i(\cos 720°+i\sin 720°)=i=a_0$

$\therefore$ 第九次碰撞剛好回到A_0點

(3)由(2)知，每 9 次碰撞一循環，而一個循環繞了兩圈

在一個循環中恰有兩點落在第一象限

A_1，A_2，A_3，…，A_{100}恰經過 11 次循環又多 1 次碰撞（$100=9\times 11+1$）

故有 22 點落在第一象限

(4)(5)由(1)得 $\sum_{n=0}^{99}a_n=\sum_{n=0}^{99}(x_n+iy_n)=\sum_{n=0}^{99}x_n+i\sum_{n=0}^{99}y_n=\dfrac{i[1-(\cos 80°+i\sin 80°)^{100}]}{1-(\cos 80°+i\sin 80°)}$

$$=\frac{i[1-(\cos 8000°+i\sin 8000°)]}{1-(\cos 80°+i\sin 80°)}=\frac{i[1-(\cos 80°+i\sin 80°)]}{1-(\cos 80°+i\sin 80°)}=i$$

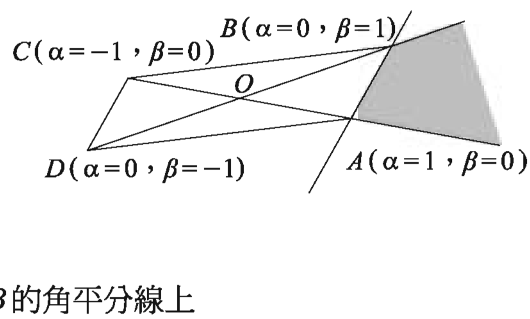
故 $\sum_{n=0}^{99}x_n=0$，$\sum_{n=0}^{99}y_n=1$

故選(1)(2)(4)

11. 見招 平面向量線性組合的應用

接招 平面上，若 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ 且 $\alpha+\beta=1$，則P點落在直線AB上

拆招 (1)必須 $\alpha>0$ 且 $\beta>0$ 才可以



(2)必須 $\alpha>0$ 且 $\beta>0$ 才可以

(3) $\because\ \alpha+\beta=1$ 且 $\beta\geq 0$

$\therefore$ P點落在射線AB上

(4) $\because\ |\alpha\overrightarrow{OA}|=|\alpha||\overrightarrow{OA}|=|\beta\overrightarrow{OB}|$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ 的P點落在$\angle AOB$的角平分線上

（因菱形的對角線平分頂角）

(5) $\because\ |\alpha|+|\beta|\leq 1$，故區域 $\{P\mid\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\}$

為圖示之平行四邊形$ABCD$之面積，為$\triangle AOB$面積的 4 倍

故選(4)(5)

12. 見招 排列組合問題

接招 m 件相同物分給 n 個人，有 $H_m^n=C_m^{n+m-1}$ 種方法

拆招 (1)╳。設甲，乙，丙，丁各分得 x，y，z，u 件

則 $x+y+z+u=10$，其中 x，y，z，u 爲非負整數，故有 H_{10}^4 種

(2)○。即求(1)中，$x+y+z+u=10$ 的正整數解，故有 $H_{10-4}^4=H_6^4=C_6^9=84$ 種

(3)╳。即求(1)中滿足 $x\geq 1$，$y\geq 2$ 之非負整數解，故有 $H_{10-3}^4=H_7^4=C_7^{10}=120$ 種

(4)╳。每件物品均有 4 種分法，故有 4^{10} 種

(5)○。即先分成 3，3，2，2 四堆，再分給 4 人

分法共有 $C_3^{10}C_3^7C_2^4C_2^2\cdot\dfrac{1}{2!\,2!}\cdot 4!=151200$ 種

13. 見招 古典機率問題

接招 若樣本空間的元素有 n 個，事件 A 的元素有 $n(A)$ 個，則 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n}$

拆招 (1)出現點數依次爲 1，1，1 $\Rightarrow$ 最小可能得分爲 3 分

(2)點數 1，2，3，4，5 各出現兩次，而 6 點出現 3 次 $\Rightarrow$ 最大可能得分爲 48 分

(3)點數出現情形爲 3 同 1 異 a，a，b，a

第 4 次一定是 a $\Rightarrow$ 機率 $=\dfrac{P_2^6\times\dfrac{3!}{2!}}{6^4}=\dfrac{5}{72}$

(4)得分爲 5 分以下，即出現點數爲 1，1，1 或 1，1，2，1

最後一次一定是 1 $\Rightarrow$ 機率 $=\dfrac{1}{6^3}+\dfrac{\dfrac{3!}{2!}}{6^4}=\dfrac{1}{144}$

(5)恰得 8 分，即出現點數爲 1，1，5，1 或 1，1，3，2，1 或 1，1，2，2，2

最後一次一定是 1 或 2 $\Rightarrow$ 機率爲 $\dfrac{\dfrac{3!}{2!}}{6^4}+\dfrac{\dfrac{4!}{2!}}{6^5}+\dfrac{\dfrac{4!}{2!\,2!}}{6^5}=\dfrac{1}{216}$

故選(1)(2)(3)(4)(5)

第二部分：選填題

A. 見招 數列與級數的問題

接招 $S=1\times r+2\times r^2+3\times r^3+\cdots+n\times r^n$

$\Rightarrow$ $rS=\quad 1\times r^2+2\times r^3+\cdots+(n-1)\times r^n+nr^{n+1}$

兩式相減 $\Rightarrow$ $(1-r)S=r+r^2+r^3+\cdots+r^n-nr^{n+1}$

拆招 觀察圖案中的數字分布知

第二、三、四象限內的數字規律及分布情況均相同

10 個同心圓共有 1 個 10，2 個 9，2^2 個 8，…，2^9 個 1

而第一象限內則分別有 1 個 11，2 個 11，2^2 個 11，…，2^9 個 11（由內而外）

故總和 $S=(1\times 2^9+2\times 2^8+3\times 2^7+\cdots+10\times 2^0)\times 3+11\times(1+2+2^2+\cdots+2^9)$

令 $S_{10}=10\times 2^0+9\times 2^1+8\times 2^2+\cdots+1\times 2^9$ ……①

則 $2\times S_{10}=\quad 10\times 2^1+9\times 2^2+\cdots+2\times 2^9+1\times 2^{10}$ ……②

② − ①得 $S_{10}=-10+2^1+2^2+\cdots+2^9+2^{10}=-10+\dfrac{2^{11}-2}{2-1}=-10+2^{11}-2=2036$

$\therefore$ $S=2036\times 3+11\times(2^{10}-1)=17361$

B. 見招 直線斜率的應用

接招 若一直線與x軸正向之夾角為θ（$\theta>0$），則其斜率為$\tan\theta$

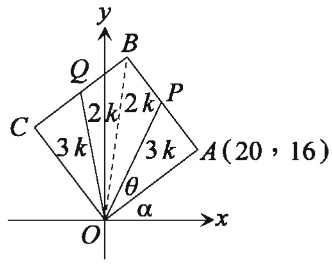
拆招 $\because$ $\triangle OCQ$面積：四邊形$OPBQ$面積：$\triangle OAP$面積$=3:4:3$

又$\triangle AOB$面積$=\triangle BOC$面積

$\therefore$ $\triangle BOP$面積$=\triangle BOQ$面積

$\therefore$ $\triangle OAP$面積：$\triangle OAB$面積

$=3:(3+2)=3:5=\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AP}:\overline{AO}$



$\therefore$ $\tan\theta=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AO}}=\dfrac{3}{5}$，又$\tan\alpha=\dfrac{16}{20}=\dfrac{4}{5}$

$\therefore$ $m_{\overline{OP}}=\tan(\theta+\alpha)=\dfrac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha}=\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}}=\dfrac{35}{13}$

C. 見招 對數的運算性質

接招 ① $\log_a rs=\log_a r+\log_a s$　　② $\log_a \dfrac{s}{r}=\log_a s-\log_a r$

拆招 ⑴若$\log 3\neq a-b$

$\Rightarrow$ $\log 9=2\log 3\neq 2a-2b$，$\log 0.027=3\log 3-3\neq 3a-3b-3$

有三項錯誤（不合），故編號01，05，10正確

⑵若$\log 5\neq 2a+c$

則$\log 2=1-\log 5\neq 1-2a-c$

$\Rightarrow$ $\log 8=3\log 2\neq 3-6a-3c$

$\log 6=\log 2+\log 3\neq(1-2a-c)+a-b=1-a-b-c$

有三項錯誤（不合），故編號06，07，09正確

⑶$\because$ $\log 3=a-b$且$\log 5=2a+c$

$\therefore$ $\log 1.5=\log 3+\log 5-1=3a-b+c-1\neq 3a+b+c-1$

$\therefore$ 編號03錯誤

⑷若$\log 7=2b+2c$，又$\log 2=1-2a-c$

$\Rightarrow$ $\log 14=\log 2+\log 7=1-2a+2b+c\neq 1-2a+b$

$\log 2.8=2\log 2+\log 7-1=2(1-2a-c)+(2b+2c)-1=1-4a+2b$

$\neq 1-4a+b-c$

$\log 0.021=\log 3+\log 7-3=(a-b)+(2b+2c)-3=a+b+2c-3\neq a+c-3$

有三項錯誤（不合）　$\therefore$ $\log 7$錯誤 $\Rightarrow$ 編號08錯誤

⑸由⑶⑷知有2個錯誤　$\therefore$ 由題意知$\log 14$正確

$\Rightarrow$ $\log 7=\log 14-\log 2=1-2a+b-(1-2a-c)=b+c$

$\therefore$ $\log 0.021=(a-b)+(b+c)-3=a+c-3$，正確

$\log 2.8=2(1-2a-c)+(b+c)-1=1-4a+b-c$，正確

由⑴⑵⑶⑷⑸知，編號03及08錯誤

D. 見招 平面方程式的應用

接招 空間中一平面的法向量為$\vec{n}=(a，b，c)$且過點$P(x_0，y_0，z_0)$，則此平面方程式為$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

拆招 設所求平面E的法向量為$\vec{n}=(a，b，c)$

則$\vec{n}\perp\vec{\ell}\ \Rightarrow\ \vec{n}\cdot\vec{\ell}=0\ \Rightarrow\ a(1-k)+2b+c(1+k)=0$

$\Rightarrow\ (c-a)k+(a+2b+c)=0$，$\forall k$恆成立

故$\begin{cases}c-a=0\\a+2b+c=0\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}a=c\\b=-c\end{cases}$

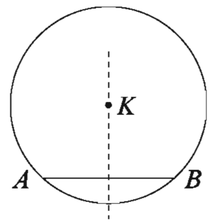
所以E之方程式為$a(x-1)+b(y-2)+c(z-3)=0$

$\Rightarrow\ c(x-1)-c(y-2)+c(z-3)=0\ \Rightarrow\ x-y+z-2=0$

E. 見招 球面方程式的應用

接招 球心$(x_0，y_0，z_0)$，半徑r的球面方程式為$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

拆招 由圖知，球心K在$\overline{AB}$之中垂面上



而$\overrightarrow{AB}=(4，0，2)$，$\overline{AB}$之中點為$(1，1，4)$

$\Rightarrow\ \overline{AB}$之中垂面方程式為$4(x-1)+0(y-1)+2(z-4)=0$

$\Rightarrow\ 2x+z-6=0$

又球心K在平面$5x-2y+5z-14=0$上

故$\begin{cases}2x+z-6=0\\5x-2y+5z-14=0\end{cases}\Rightarrow\ K(2t，-5t+8，-4t+6)$

欲使半徑最小，知$R^2=\overline{KA}^2$最小

$\Rightarrow\ (2t+1)^2+(-5t+7)^2+(-4t+3)^2=45t^2-90t+59=45(t-1)^2+14$

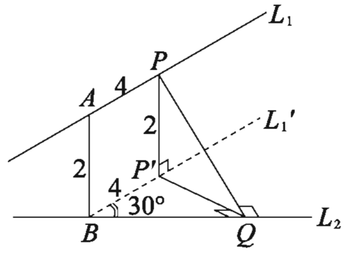
當$t=1$時，$R^2=14$最小，此時球心$K(2，3，2)$

故所求為$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=14$

F. 見招 歪斜線距離與三垂線定理的應用

接招 三垂線定理：直線$AB\perp$平面E於B，L為平面E上不過B之一直線，若$\overline{BC}\perp L$於C，則$\overline{AC}\perp L$

拆招 作一平面E包含L_2且與L_1平行



並作L_1在E上之投影$L_1'\ \Rightarrow\ \overline{PP'}$為$E$的法向量

$\overline{PP'}\perp\overline{P'Q}$且$\overline{PP'}\perp L_1'$

作$\overline{P'Q}\perp L_2$，則由三垂線定理知$\overline{PQ}\perp L_2$

$\therefore\ \angle P'QB=90°$且$\angle PP'Q=90°$

由圖知$\overline{BP'}=\overline{AP}=4$

$\therefore\ \overline{P'Q}=\dfrac{1}{2}\overline{P'B}=\dfrac{1}{2}\times 4=2$

$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{\overline{PP'}^2+\overline{P'Q}^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

G. 見招 數學期望值的應用

接招 若完成一事件的機率為P，可得K元，則其數學期望值為$P \cdot K$元

拆招 甲方案：$105 \times \dfrac{C^4_2 C^6_2}{C^{10}_4} = 45$（元）

乙方案：$165 \times \dfrac{C^4_2 C^8_2}{C^{10}_4} = 56$（元）

$\therefore$ 相差$56 - 45 = 11$（元）