大正資訊模擬輔助教學
臺北區公立高中九十四學年度第一學期
大學入學學科能力測驗聯合模擬考
數學考科詳解

解題老師：吳憲章老師

第一部分：選擇題

壹、單選題

1. (1)　2. (3)　3. (4)　4. (5)　5. (4)

貳、多選題

6. (1)(2)(3)(4)　7. (1)(4)　8. (2)(3)(5)　9. (2)(3)(5)　10. (3)(5)
11. (3)(4)(5)

第二部分：選填題

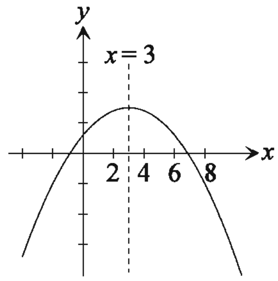
A. 1000　B. 3　C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　D. 6　E. $(1，-2，0)$
F. 3　G. 1568　H. 17　I. $40\sqrt{3}$

解析

第一部分：選擇題

壹、單選題

1. 見招 週期函數的問題
   接招 $f(x+k)=f(x)\ \Rightarrow\ f(x)$的週期為$k$
   拆招 由條件知：$u_0=4$，$u_1=f(u_0)=f(4)=1$，$u_2=f(u_1)=f(1)=3$
   $u_3=f(u_2)=f(3)=5$，$u_4=f(u_3)=f(5)=4=u_0$
   故每四個循環一次，因此$u_{2005}=u_{4\times 501+1}=u_1=1$，故選(1)



2. 見招 二次函數圖形的特性
   接招 二次函數$y=ax^2+bx+c$滿足$f(k+t)=f(k-t)$
   則圖形對$x=k$成對稱
   拆招 由圖知$f(3)>f(1)=f(5)>f(6)\ \Rightarrow\ f(3)>f(1)>f(6)$
   故選(3)

3. 見招 和差化積公式
   接招 $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
   拆招 原式$=\frac{2\sin 15^\circ\cos 5^\circ}{2\cos 15^\circ\cos 5^\circ}=\tan 15^\circ$，故選(4)

4. 見招 對數函數的大小比較

接招 若$a>1$，則$\log_a x>\log_a y \Leftrightarrow x>y>0$

拆招 $\because\ 1<x<d \quad \therefore\ \log_d 1<\log_d x<\log_d d \Rightarrow 0<\log_d x<1$

$\Rightarrow (\log_d x)^2<\log_d x<2\log_d x=\log_d x^2 \Rightarrow a<b$

又$c=\log_d(\log_d x)<\log_d 1=0$，故$c<a<b$，故選(5)

5. 見招 數學期望值的問題

接招 若完成一事件的機率爲P，可得K元，則完成該事件之期望值爲$P\times K$元

拆招 依題意得，P(數字相同)$=\frac{1}{5}\underset{\text{均爲 }4}{\times}\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\underset{\text{均爲 }5}{\times}\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

P(白>紅)$=P$(白 5 且紅 4)$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

故所求$=100\times\frac{1}{10}+500\times\frac{1}{20}=35$（元），故選(4)

貳、多選題

6. 見招 函數圖形的特性

接招 函數$y=f(x)$，若$y=0$，則得方程式$f(x)=0$，圖形與x軸之交點之x坐標即爲方程式$f(x)=0$之實數解

拆招 (1)○。$\because\ 1<\sqrt{2}<2 \quad \therefore\ \sqrt{2}$介於$A$，$B$之間 $\quad \therefore\ f(\sqrt{2})<0$

(2)○。$\because$ 最低點爲$E(m, n)$ $\quad \therefore$ 最小值爲n

(3)○。由圖知，滿足$f(x)>0$之x的範圍爲$x>2$或$-1.5<x<1$或$x<-2$

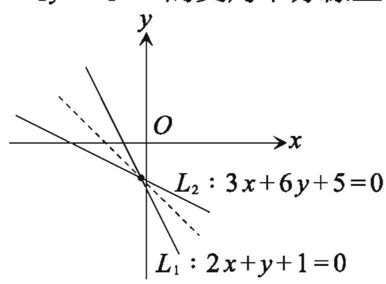
(4)○。由圖知$f(x)=0$之解爲$x=1, 2, -1.5, -2$

(5)╳。$f(x)=3 \Rightarrow f(x)-3=0$，將圖形往下平移 3 單位後與$x$軸只有 2 交點

故只有 2 個實數解

7. 見招 兩直線的交角平分線問題

接招 若$P(x, y)$爲二直線$L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$及$L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$的交角平分線上一點，則$\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$



拆招 (1)○。由圖知，銳角角平分線的斜率小於 0

(2)╳。若$P(x, y)$爲交角平分線上任一點，則

$\frac{|2x+y+1|}{\sqrt{5}}=\frac{|3x+6y+5|}{3\sqrt{5}}$

$\Rightarrow |2x+y+1|=\frac{|3x+6y+5|}{3}$

整理化簡即得交角平分線

(3)╳。由圖知，銳交角平分線在區域$(2x+y+1)(3x+6y+5)<0$內

故可由$-3(2x+y+1)=3x+6y+5$化簡而得

(4)○。由(3)知正確

(5)╳。不一定，因若有一交角平分線爲鉛直線，則其斜率不存在

8. 見招 內積的應用

接招 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

拆招 $\angle B=60^\circ$，$\angle AHB=90^\circ \Rightarrow \angle BAH=30^\circ$

又 $\angle C=40^\circ$，$\angle AHC=90^\circ \Rightarrow \angle CAH=50^\circ$

$a=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AH}|\cos 30^\circ=(|\overrightarrow{AB}|\cos 30^\circ)|\overrightarrow{AH}|=|\overrightarrow{AH}|^2$

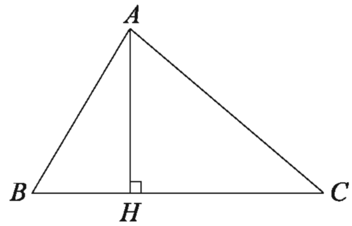
$b=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AH}||\overrightarrow{AC}|\cos 50^\circ=|\overrightarrow{AH}|^2=a$

$c=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$（$\because \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$）

$d=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|\cos 40^\circ$

$=|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CH}|>|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{AH}|>|\overrightarrow{AH}|^2=a$

$e=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=-|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BA}|\cos 60^\circ<0$



故 e 最小

所以 $d>a=b>c>e$，故選(2)(3)(5)

9. 見招 橢圓的性質

接招 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=$定值 $2a>\overline{F_1F_2}$

拆招 $\Gamma:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1 \Rightarrow a=4$，$b=3$，$c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

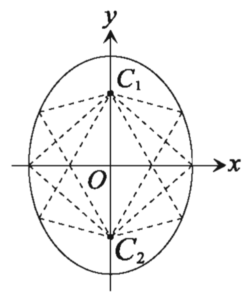
(1)╳。如圖

當 P 為短軸兩端點時，可使 $\triangle PC_1C_2$ 為等腰三角形

另外分別以 C_1，C_2 為圓心，$\overline{C_1C_2}$ 為半徑畫弧

與橢圓各有兩交點，亦可為 P

故滿足 $\triangle PC_1C_2$ 為等腰三角形的 P 點共有 6 個



(2)○。由畫圖可知

(3)○。$\overline{C_1C_2}=2c=2\sqrt{7}$

故 $\triangle PC_1C_2$ 之周長 $=\overline{PC_1}+\overline{PC_2}+\overline{C_1C_2}=2\cdot 4+2\sqrt{7}=8+2\sqrt{7}$

所以 $\triangle QC_1C_2$ 的周長 $>8+2\sqrt{7}$

(4)╳。因 $\overline{PC_1}+\overline{PC_2}=2a=8$ 為定值，故 $\triangle PC_1C_2$ 之周長為唯一

(5)○。面積最大發生在 P 點為短軸端點時

此時面積值 $=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times 3=3\sqrt{7}$

10. 見招 古典機率的應用

接招 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

拆招 (1)╳。(a)自己正面，兩位朋友反面或(b)自己反面而兩位朋友正面時，由自己付帳

故機率為 $\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

(2)╳。(3)○。由(1)知 $\dfrac{1}{4}\times 3=\dfrac{3}{4}$

(4)╳。(5)○。三正面或三反面之機率為 $(\dfrac{1}{2})^3\times 2=\dfrac{1}{4}$

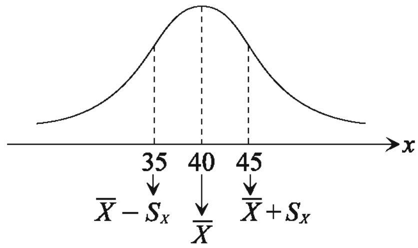
11. 見招 平均數與標準差的應用

接招 ① $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　② $\overline{X}-A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-A)$　③ $Y=aX+b\ \Rightarrow\ S_Y=|a|S_X$，$\overline{Y}=a\overline{X}+b$

④ $(\overline{X}-S_X，\overline{X}+S_X)$ 面積約占 68%

拆招 $Y=10\left[\frac{(X-\overline{X})}{S_X}+7\right]=10\left(\frac{X-40}{5}+7\right)$

$=2(X-40)+70=2X-10$



(1)╳。$\overline{Y}=2\overline{X}-10=2\times40-10=70$

(2)╳。(3)◯。$S_Y=2S_X=2\times5=10$

(4)◯。$Y=2\times35-10=60$

(5)◯。原始成績達 35 分的同學，經調整分數後即可達到及格分數 60 分

而 35 分 $=40-5=40-S_X$ 在 $\overline{X}-S_X$ 的位置，由常態分配曲線圖可知

約有 $1-\frac{1}{2}(1-68\%)=84\%$ 的同學經調整分數後，即可達到及格分數 60 分

差不多為 $1000\times84\%=840$ 人

第二部分：選填題

A. 見招 等差級數和的應用

接招 等差級數 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$

拆招 設 a_k 的首項為 b_k，$d=2$

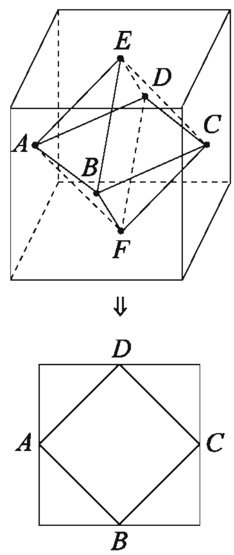
則 $b_1=1$，$b_2=3=1+2$，$b_3=7=1+2+4=1+2(1+2)$

$b_4=13=1+2+4+6=1+2(1+2+3)$，⋯

$b_{10}=1+2(1+2+3+\cdots+9)=91$

故 $a_{10}=\frac{10[2\times91+(10-1)\times2]}{2}=1000$

B. 見招 四面體體積的計算



接招 四面體體積 $=\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高

拆招 由正方形 $ABCD$ 之面積為正立方體每一面的面積之半

故正八面體 E-$ABCD$-F 的體積

$=$正方形 $ABCD$ 的面積 $\times\overline{EF}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{2}\times$正立方體每一面的面積$\times$正立方體的高$\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{6}\times$正立方體的體積

$=\frac{1}{6}\times18$

$=3$

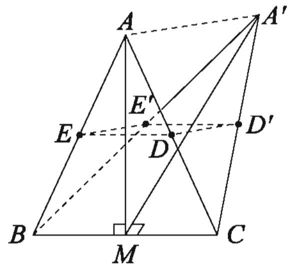
C. 見招 二面角的應用

接招 利用兩平面的夾角求出矩形$DD'E'E$的邊長

拆招 M為$\overline{BC}$之中點，連$\overline{AM}$，$\overline{A'M}$ $\therefore$ $\overrightarrow{BC}$分別垂直於$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AM'}$

$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{MA'}\cdot\overrightarrow{MA})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MA'}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=0-0=0$

$\therefore$ $\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{BC}$



$\because$ $\triangle ABC$與$\triangle A'BC$均為正三角形，且邊長為2

又$\angle AMA'=60°$（即$\triangle ABC$和$\triangle A'BC$所成的二面角）

$\triangle AMA'$為正三角形

$\Rightarrow$ $\overline{A'A}=\overline{AM}=\overline{A'M}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$

又$|\overrightarrow{DD'}|=|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}|=|\overrightarrow{EE'}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

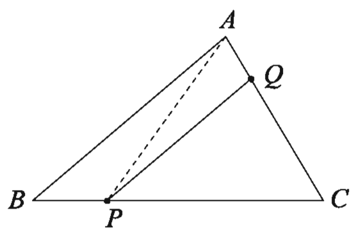
$|\overrightarrow{DE}|=|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{D'E'}|=1$

$\therefore$ 四邊形$DD'E'E$為矩形，得$\overline{DE'}=\sqrt{\overline{DD'}^2+\overline{D'E'}^2}=\sqrt{(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

D. 見招 三點共線的條件

接招 設A，B，C三點共線，則$\overrightarrow{PB}=\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PC}$ $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta=1$

拆招 $\because$ $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



$\therefore$ 取$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

過Q點作$\overline{QP}\,//\,\overline{AB}$交$\overline{BC}$於$P$，則$\triangle ACP$的面積最大

而B，P，C三點共線，故$t+\dfrac{1}{4}=1$ $\Rightarrow$ $t=\dfrac{3}{4}$

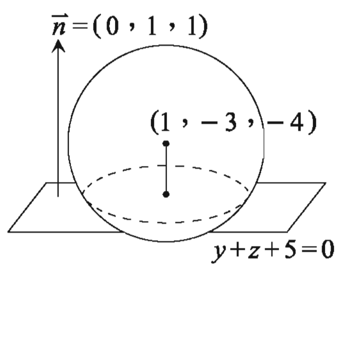
即$\overline{BP}:\overline{PC}=1:3$

此時$\triangle ACP$面積$=\dfrac{3}{4}\triangle ABC$面積$=\dfrac{3}{4}\times 8=6$

E. 見招 平面截球成一圓的問題

接招 利用向量求出截圓的圓心，再求此圓心在xy平面上的投影點

拆招 球S：$(x-1)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=6$



$\Rightarrow$ 球心$O(1，-3，-4)$

而平面E：$y+z+5=0$，法向量$\vec{n}=(0，1，1)$

令截圓的圓心為$A(1，-3+t，-4+t)$

代入E中得$(-3+t)+(-4+t)+5=0$ $\Rightarrow$ $t=1$

故圓心為$A(1，-2，-3)$

其在xy平面上的投影點$(1，-2，0)$

即為橢圓Γ的中心

F. 見招 雙曲線的概念

接招 雙曲線正焦弦的中點在貫軸所在的直線上

拆招 $\overline{PQ}$ 的中點$\left(2，\dfrac{b+7}{2}，\dfrac{c+6}{2}\right)$為雙曲線的一焦點，必在貫軸$x=y-1=\dfrac{z+1}{3}$上

代入得$2=\dfrac{b+7}{2}-1=\dfrac{\frac{c+6}{2}+1}{3}$ $\Rightarrow b=-1，c=4$

$\therefore$ $b+c=3$

G. 見招 組合的應用

接招 $C^n_m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

拆招 所取兩格在同一行的方法數為$C^8_2\times 8=224$

$\uparrow$

共8行

所取兩格在同一列的方法數為$C^8_2\times 8=224$

$\uparrow$

共8列

故所求$=C^{64}_2-224-224=2016-224-224=1568$

H. 見招 二項式定理的應用

接招 $(x+y)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C^n_k x^{n-k}y^k$

拆招 $(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2})^{100}=\sum\limits_{k=0}^{100}(\sqrt{3}x)^{100-k}(\sqrt[3]{2})^k=\sum\limits_{k=0}^{100}3^{\frac{100-k}{2}}2^{\frac{k}{3}}x^{100-k}$

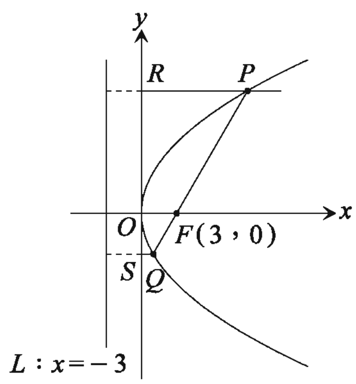
$\because$ 係數為有理數 $\therefore$ $2\mid 100-k$且$3\mid k$

$\Rightarrow$ $k=0，6，12，18，\cdots，96$，共17個

I. 見招 拋物線的性質

接招 $\overline{PF}=d(P，L)$，其中F為焦點，L為準線

拆招 $\Gamma：y^2=12x$ $\Rightarrow$ 焦點$F(3，0)$，準線$L：x=-3$



令$\overline{QF}=d(Q，L)=k$ $(k>0)$

則$\overline{PF}=d(P，L)=3k$

$\therefore$ $\overline{PR}=d(P，L)-d(R，L)=3k-3$

$\overline{QS}=d(Q，L)-d(S，L)=k-3$

由圖知$\overline{OF}=\dfrac{1}{4}(\overline{PR}+3\overline{QS})$

$\Rightarrow$ $3=\dfrac{1}{4}[(3k-3)+3(k-3)]$ $\Rightarrow$ $k=4$

$\therefore$ $\overline{PR}=3\times 4-3=9$，$\overline{QS}=4-3=1$

$x=9$，1代入Γ分別得$P(9，6\sqrt{3})$，$Q(1，-2\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ $\overline{RS}=6\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})=8\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ 梯形$PQSR$之面積$=\dfrac{1}{2}(\overline{PR}+\overline{QS})\cdot\overline{RS}=\dfrac{(9+1)\cdot 8\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$